INSTITUT SUPÉRIEUR DE GESTION

Association d'éducation
Organisme d'intérêt général à caractère éducatif
Établissement libre d'enseignement supérieur
habilité à délivrer le

Diplôme International de Gestion et Management

CONCOURS D'ADMISSION DE 1983

MATHÉMATIQUES II

Toutes options

DURÉE : 3 heures. — COEFFICIENTS : 4
COEFFICIENTS : 5 (réservé au BAC technique)

NOTATIONS

$\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

$\mathcal{D}$ désigne l'ensemble des fonctions réelles définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

E désigne l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}$ tels que l'intégrale $\int_0^{+1} tf(t)\,dt$ soit convergente.

On rappelle que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont des espaces vectoriels réels pour l'addition des fonctions réelles et leur multiplication par les nombres réels. Pour les mêmes lois, il est clair que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$.

La fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ est notée ω.

Log désigne la fonction logarithme népérien.

A

1° Pour tout réel α, on note f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha$.

A quelle condition a-t-on $f_\alpha \in E$?

2° Pour tout entier naturel non nul n, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h_n(x) = (\text{Log } x)^n$. On pose en outre $h_0(x) = 1$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad h_n \in E$.

3° Pour tout réel strictement positif x et tout entier naturel n, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^x u\, h_n(u)\, du$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n(x) = \frac{x^2}{2} \sum_{p=0}^{p=n} \frac{(-1)^p}{2^p} A_n^p\, h_{n-p}(x)$$

4° On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

a. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 \mid \operatorname{Log} x \mid^{3/2}}$ si $x \in]0, \frac{1}{e}]$, et $\forall x > \frac{1}{e}$ $f(x) = e^2$.

b. $g(x) = \dfrac{1}{x^2} \sin \dfrac{1}{x}$

Montrer que f et g sont des éléments de E.

B

A tout élément f de E, on associe la fonction notée Lf définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$(Lf)(x) = f(x) - \frac{2}{x^2} \int_0^x t f(t)\, dt$$

1° Montrer que l'on définit, en posant $L(f) = Lf$, une application linéaire L de E dans $\mathcal{C}$.

2° En utilisant la fonction f (partie A, 4° *a.*), montrer que E n'est pas stable par L ($L(E) \not\subset E$).

3° On note E' l'ensemble des éléments f de $\mathcal{C}$ pour lesquels il existe un réel $\alpha < 2$ tel que $t^\alpha f(t)$ ait une limite finie à droite en zéro :

a. Montrer que E' est un sous-espace vectoriel de E;

b. Montrer que E' est stable par L
la relation : $\forall f \in E' \quad \bar{L}(f) = Lf$ définit donc un endomorphisme de E';

c. On considère la fonction g (partie A, 4° *b.*). Montrer que g n'est pas élément de E', mais que $L(g) \in E$;

4° *a.* Montrer que tout élément du noyau de L est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Quel est ce noyau?
Qu'en déduit-on pour L? pour $\bar{L}$?

b. Résoudre dans E : $L(f) = f_{-2}$. Conclusion?

5° *a.* Soit $u \in \mathcal{D} \cap E$. Montrer que :

$$L(f) = u \Rightarrow f \in E \cap \mathcal{D} \text{ et } \forall x > 0 \quad f'(x) = 2\frac{u(x)}{x} + u'(x)$$

b. Étudier la réciproque. Modifier l'énoncé de *a.* pour qu'il y ait équivalence.

c. Résoudre l'équation $L(f) = h_p$ (p entier naturel fixé).

6° Pour tout réel λ, on pose $E_\lambda = \{ f \in E \mid L(f) = \lambda f \}$.

a. Déterminer E_1. Dans la suite, on suppose $\lambda \neq 1$;

b. Montrer que $f \in E_\lambda \Rightarrow f \in E \cap \mathcal{D}$ et $\forall x > 0 \quad \frac{\lambda - 1}{2} x f'(x) + \lambda f(x) = 0$;

c. Déterminer le réel α tel que $f_\alpha \in E_\lambda$;

d. Établir les résultats suivants :

(i) $E_\lambda \neq \{ \omega \} \Leftrightarrow \lambda < 1$

(ii) $\forall \lambda < 1, \quad f \in E_\lambda \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad f = k f_{\frac{2\lambda}{1-\lambda}}$

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad E_\lambda \subset E'$. En déduire qu'en *b.*, il y a équivalence.

e. Conclure.

7° Soit F_n l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré $p \leqslant n$.

a. Montrer que F_n est stable par L et donner la matrice de la restriction de L à F_n dans la base $(1, x, \ldots, x^n)$;

b. Résoudre $L(f) = 1 + x + \ldots + x^n$.

C

Pour tout entier naturel n, on désigne par G_n le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions :

$$(h_p)_{0 \leqslant p \leqslant n}$$

1° Montrer que $(h_p)_{0 \leqslant p \leqslant n}$ est une base de G_n.

2° Montrer que l'on définit un endomorphisme L_n de G_n en posant :

$$\forall f \in G_n \quad L_n(f) = Lf$$

En donner la matrice dans la base précédente.

3° On pose $L^0_n = I_n$ (application identique de G_n) et :

$$\forall p \geqslant 1 \quad L^p_n = L_n \circ L^{p-1}_n$$

a. Montrer que $L^{n+1}_n = 0$;

b. En déduire que $(I_n - L_n)$ est inversible et donner son inverse Φ_n en fonction de L_n;

c. En utilisant 2° et 3° *b.*, résoudre dans G_n : $(I_n - L_n)(f) = h_2$;

d. Retrouver ce dernier résultat par un calcul direct.

4° Donner la matrice de Φ_n dans la base $(h_p)_{0 \leqslant p \leqslant n}$.

fin